E.S.C.C.

ÉCOLE SUPÉRIEURE DE COMMERCE DE COMPIÈGNE

Établissement d'enseignement supérieur technique privé

6, Avenue Thiers - 60200 Compiègne - Tél. 44 40 29 32

CONCOURS D'ADMISSION 1986

MATHEMATIQUES I

Mercredi 23 Avril 1986 de 8H00 à 12H00

Option : Générale

Coefficient : 4

PROBLEME I

Soit E un espace vectoriel réel de dimension 3 et $B_0 = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sa base canonique.

- F est le sous-ensemble de E défini par
$$F = \{x\vec{i} + y\vec{j} + x\vec{k} \ / \ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$$
- $\mathcal{M}$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.
- f est l'endomorphisme de E dont la matrice A dans la base B_0 est :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

On pose :
$\vec{e}_1 = 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$; $\vec{e}_2 = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ et $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$

PARTIE 1.

1°. Montrer que F est sous-espace vectoriel de E.

2°. Montrer que B est une base de F.

3°. Montrer que pour tout vecteur $\vec{u}$ de E, $f(\vec{u})$ est élément de F.

4°. Déterminer le noyau et l'espace image de f.

PARTIE 2.

E et F sont rapportés respectivement à leur base B_0 et B.

1°. φ_1 est l'application linéaire de E dans F définie par :
$$\forall \vec{u} \in E \quad \varphi_1(\vec{u}) = f(\vec{u})$$
Quelle est la matrice A_1 de φ_1 ?

2°. φ_2 est l'application linéaire de F dans E définie par :
$$\forall \vec{u} \in F \quad \varphi_2(\vec{u}) = f(\vec{u})$$
Quelle est la matrice A_2 de φ_2 ?

3°. φ_3 est l'application linéaire de F dans F définie par :
$$\forall \vec{u} \in F \quad \varphi_3(\vec{u}) = f(\vec{u})$$
Quelle est la matrice A_3 de φ_3 ?

PARTIE 3.

1°. Ecrire le produit matriciel $A_2 . A_1$ en fonction de A.

2°. Ecrire le produit matriciel $A_2 . A_3 . A_1$ en fonction de A

On pose $A^0 = I$

3°. Calculer A^k pour $k \in \mathbb{N}$

4°. P est un polynôme de la variable réelle x, à coefficients α_k réels,
$$P(x) = \sum_{k=0}^{k=n} \alpha_k x^k$$

Donner l'expression de P(A) dans les cas suivants :

a) les coefficients α_k sont quelconques.

b) $\alpha_k = k$

c) $\alpha_k = ak + b \qquad (a,b) \in \mathbb{R}^2$

d) $\alpha_k = q^k$ avec $q \in \mathbb{R}$
Discussion.

Ecole Superieure de Commerce de Compiegne
Option generale. Math 1
1986
page 275

PROBLEME II

PARTIE 1.

v est la suite réelle définie par :

$$\begin{cases} v_0 = \frac{1}{4} \\ v_{n+1} = \frac{2v_n}{(n+3)v_n+1} \qquad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1°. Calculer V_1 , V_2 , V_3 .

2°. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$ on a: $\frac{1}{n+3} < v_n < \frac{1}{n}$

3° Montrer que la suite v est décroissante et calculer $\lim(v_n)$ quand n tend vers $+\infty$

PARTIE 2.

On pose $u_n = \frac{1}{v_n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1°. Exprimer u_{n+1} en fonction de n et de u_n.

2°. Déterminer les réels a et b pour que la suite w définie par $w_n = u_n + an + b$ soit une suite géométrique.

3°. Calculer w_n en fonction de n et déduire l'expression de v_n en fonction de n.

PARTIE 3.

1°. L'écriture $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ a-t-elle un sens ?

2°. Calculer $S_1 = \sum_{k=0}^{k=n} u_k$

3° Pour $m \in \mathbb{N}$ et $m \geqslant n$, calculer

$$S_2 = \sum_{n=0}^{n=m} \sum_{k=0}^{k=n} u_k$$

PARTIE 4.

Le plan P est rapporté au repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$

1°. Pour $x \in \mathbb{R}$, montrer que : $3 \cdot 2^{-x} + x + 1 > 0$

2°. $f(x) = \frac{1}{3.2^{-x}+x+1}$

Que représente la restriction de f à $\mathbb{N}$?

3°. Pour $x \in \mathbb{R}$, étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative $\mathcal{C}$

4°. Déduire de l'étude précédente que l'équation $f(x) = x$ admet une seule solution notée α

Déterminer un entier naturel n_0 tel que : $\alpha \in]n_0, n_0+1[$

5°. Détermination par interpolation linéaire, d'une valeur approchée de α :

Soit A le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse n_0 et B le point de $\mathcal{C}$ d'abcisse $(n_0 + 1)$

a) déterminer l'équation de la droite AB.

b) la droite AB coupe la première bissectrice des axes en un point M d'abscisse α_0.

Calculer α_0 (valeur approchée de α)